Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων
Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γενικής Παιδείας
Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 22
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 86-87
Α4. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Λύνουμε τις εξισώσεις:

$(3x-1)(8x^2-6x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ή $x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{1}{4}$ (με λύση του τριωνύμου)

$9x^2-3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ή $x = \frac{2}{3}$ (με λύση του τριωνύμου)

Αλλά η Ρ(Γ) ανήκει στο σύνολο λύσεων της 2ης εξίσωσης και επειδή ισχύει $0 \le P(\Gamma) \le 1$, άρα $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$.

Β1.

Ισχύει: $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Αλλά οι $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της 1ης εξίσωσης.
Επειδή ισχύει : $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Β2.

$P(A'-B') = P[A' \cap (B')'] = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$

Αλλά: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$

Άρα

$P(A'-B') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

Ισχύει ότι: $\Delta = (A \cap B)'$

Άρα : P(Δ) = 1- P(A$\cap$B) = 1- $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$

B3.

Ισχύει ότι: E = (A-B)$\cup$(B-A)

P(E) = P [(A-B)$\cup$(B-A)] = P(A) - P(A$\cap$B) + P(B) - P(A$\cap$B) =
= P(A) + P(B) – 2 P(A$\cap$B) = $\frac{1}{3}$ + $\frac{5}{12}$ - 2.$\frac{1}{4}$ = $\frac{9}{12}$ - $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{12}$ = $\frac{1}{4}$

B4.

Έστω ότι τα B, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε:
P (B $\cap$Γ) = P(B) + P(Γ) = $\frac{5}{12}$ + $\frac{2}{3}$ = $\frac{13}{12}$ > 1 άρα καταλήγουμε σε Άτοπο ….
Άρα τα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Κλάσεις	**Κέντρα (x_i)**	**f_i %**
[8, 10)	9	10
[10, 12)	11	10
[12, 14)	13	30
[14, 16)	15	20
[16, 18)	17	30

Γ1.
Ισχύουν από υπόθεση:

f_1 % = 10 %, f_5 % = 30 %, $\alpha_3 = 108^o$

$\alpha_3 = 360.f_3 \Leftrightarrow 108 = 360.f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} = 0{,}3$

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 0{,}9 + 11f_2 + 3{,}9 + 15f_4 + 5{,}1 \Leftrightarrow$

$11f_2 + 15f_4 = 4{,}1$ (1)

Αφού $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0{,}1 + f_2 + 0{,}3 + f_4 + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}3$ (2)

Λύνω το σύστημα των (1), (2) και βρίσκω : $f_4 = 0{,}2$, $f_2 = 0{,}1$

Γ2.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 f_i \Leftrightarrow$$

$s^2 = (9-14)^2.0{,}1 + (11-14)^2.0{,}1 + (13-14)^2.0{,}3 + (15-14)^2.0{,}2 + (17-14)^2.0{,}3 = \ldots = 6{,}6$

Άρα $s = \sqrt{6{,}6} \cong 2{,}57$

$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2{,}57}{14} > 0{,}1$

Άρα ΟΧΙ ομογενές το δείγμα.

Γ3.

$\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1780 \Leftrightarrow x_4 \,.\, f_4 \,.\, v + x_4 \,.\, f_4 \,.\, v + x_4 \,.\, f_4 \,.\, v + x_4 \,.\, f_4 \,.\, v = 1780 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 \,.\, 0{,}1 \,.\, v + 11 \,.\, 0{,}1 \,.\, v + 13 \,.\, 0{,}3 \,.\, v + 15 \,.\, 0{,}2 \,.\, v = 1780 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}9 \,.\, v + 1{,}1 \,.\, v + 3{,}9 \,.\, v + 3 \,.\, v = 1780 \Leftrightarrow 8{,}9 \,.\, v = 1780 \Leftrightarrow v = 200$

Γ4.

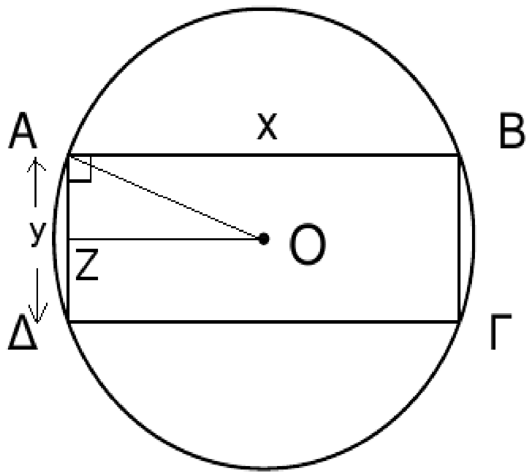
$\beta_i = \frac{a_i - \overline{a}}{S_a} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{S_a} a_i - \frac{\overline{a}}{S_a}$

Από τη γνωστή εφαρμογή ισχύει :

$\overline{\beta} = \frac{1}{S_a} \overline{\alpha} - \frac{\overline{a}}{S_a} = 0$

$S_\beta = \frac{1}{S_a} S_a = 1$

ΘΕΜΑ Δ



Δίνονται: ρ = 5, ΑΒ = x.
Έστω: ΑΔ = y
Φέρω την κάθετη ΟΖ στην ΑΔ, οπότε ΑΖ = y/2.
Ισχύει ότι: 0 < x < 10 (αφού η μέγιστη τιμή του x είναι η τιμή της διαμέτρου του κύκλου που είναι ίση με 2.ρ = 10)

Δ1.

Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΖΟ και έχω:

$AO^2 = AZ^2 + ZO^2 \Leftrightarrow \rho^2 = \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4.\rho^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 4.\rho^2 - x^2 \Leftrightarrow$

$y = \sqrt{4.\rho^2 - x^2} \Leftrightarrow y = \sqrt{4.5^2 - x^2} \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$ (αφού $0 < x < 10$)

Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται:

$(ΑΒΓΔ) = x \,.\, y \Rightarrow f(x) = x \,.\, \sqrt{100 - x^2}$, με $0 < x < 10$

Δ2.

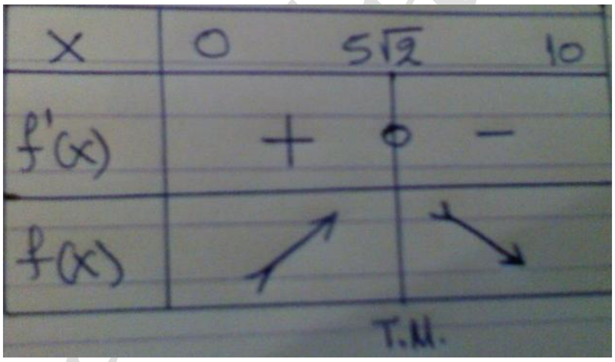
Βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης f.

$f\,'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \,.\, \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} =$

$= \sqrt{100 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \dfrac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$

$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow$

$x = \sqrt{50} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$



x	0		$5\sqrt{2}$		10
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	
			Τ.Μ.		

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 5\sqrt{2}$.

Άρα το $y = \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Άρα: $x = y = 5\sqrt{2}$.

Άρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $5\sqrt{2}$ μονάδων.

Δ3.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)\sqrt{100 - (1+x)^2} - \sqrt{99}}{98x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)\sqrt{100 - 1 - 2x - x^2} - \sqrt{99}}{98x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)\sqrt{99 - 2x - x^2} - \sqrt{99}}{98x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}-\sqrt{99}\right]\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}\right]^2-\left(\sqrt{99}\right)^2}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2\left(99-2x-x^2\right)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x+x^2)\left(99-2x-x^2\right)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{99-2x-x^2+198x-4x^2-2x^3+99x^2-2x^3-x^4-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^4-4x^3+94x^2+196x}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(-x^3-4x^2+94x+196\right)}{98x\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3-4x^2+94x+196}{98\left[(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right]} = \frac{196}{98\left(\sqrt{99}+\sqrt{99}\right)} = \frac{196}{98.2\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

Ισχύει ότι:

Α-Β $\subseteq$ Α $\Rightarrow$ P(Α-Β) $\leq$ P(Α) (1)

Αλλά P^2(Α-Β) $\geq$ P^2(Α)

[διότι : 0 $\leq$ P(Α-Β) , P(Α) $\leq$ 1]

Άρα 100 - P^2(Α-Β) $\leq$ 100 - P^2(Α) $\Leftrightarrow \sqrt{100 - P^2(A-B)} \leq \sqrt{100-P^2(A} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \geq \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A}} \leq \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις (1), (2)

$$\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A}} \leq \frac{P(A(}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$$

Αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 5 $\sqrt{2}$] άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A}}\right) \leq f\left(\frac{P(A(}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Θωμάς Μυλωνάς
Μαθηματικός